GCR2

ENIG

ANNEE UNIVERSITAIRE 2014/2015

LUNDI 30/03/2015

Durée : 2H00. ***Documents non autorisés.***

Enseignant responsable : Mr BENZINA.H

N.B:Les GSM et Smartphones sont interdits.

DS ANTENNES ET PROPAGATION LIBRE

I) Un dipôle court ($I(x_p)= I_o\left(1-\frac{2|x_p|}{l}\right)\vec{i}$ *pour* $|x_p| \le \frac{l}{2}$) est placé symétriquement autour de l'origine , tout au long de l'axe Ox. Sachant qu'on se place dans la région de champs lointain:

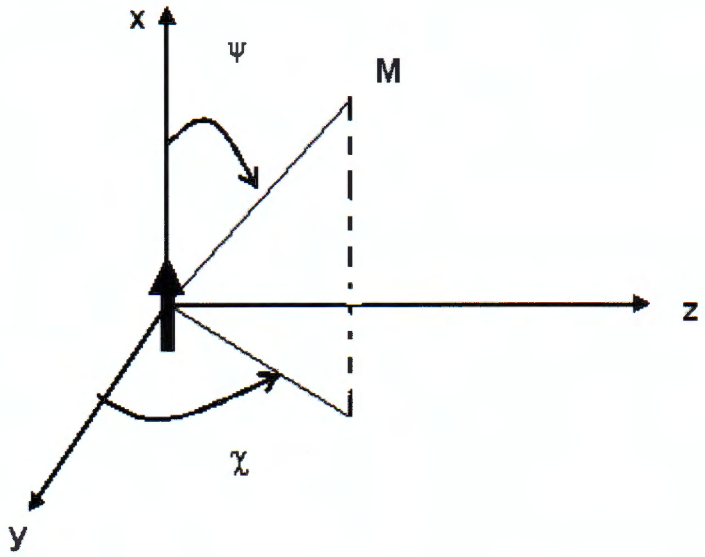
1°)a)Traiter d'abord le cas où le dipôle est placé symétriquement le long de l'axe Oz.($\vec{A}$ puis $\vec{E}$ puis $\vec{H}$)

b)Obtenir les champs E_ψ et H_χ en fonction des angles θ et φ des coordonnées sphériques usuelles.

2°)a)Donner l'expression de l'intensité de rayonnement.

b)Calculer la puissance rayonnée.

c)Obtenir la directivité.



II) Soit une spire rayonnante de surface S, parcourue par un courant $Ie^{-j\omega t}$ (I est une constante) dont la dimension est négligeable devant la longueur d'onde . On se place dans la région de champ lointain:

1°) a) Obtenir le champ $\vec{E}(M)$.

b) Obtenir le champ $\vec{H}(M)$.

2°) Trouver l'expression de la puissance moyenne rayonnée de la spire.

3°) a)Déduire l'expression de la résistance de rayonnement. Simplifier l'expression et la donner en fonction de la surface de la spire et de la longueur d'onde.

b)Comment peut-on augmenter la résistance de rayonnement ?

c)Comment calcule t-on la résistance ohmique de cette spire ?

4°)Soit une spire circulaire de longueur $0,25\lambda$ et dont le diamètre de la section du fil est égale à $0,0015\lambda$. Le fil est fait à partir d'un conducteur de conductivité $\sigma=3,95.10^{7}Sm^{-1}$. La fréquence de travail est de 2,4MHz et on donne $\mu_o=4\pi10^{7}F/m$

a)Quelle est la valeur de la résistance de rayonnement de la spire.

b)Quelle est la valeur de sa réactance.

c)Calculer sa résistance de dissipation.

d)Que vaut l'impédance d'entrée de cette antenne ?

e)Que vaut l'efficacité de rayonnement de cette antenne ?

III) Tracer, dans la feuille jointe avec le sujet d'examen , en polaires, le diagramme de rayonnement du facteur de réseau normalisé, d'un réseau linéaire horizontal de 6 dipôles demi-onde horizontaux équidistants ($d=\lambda/2$), colinéaires, excités uniformément et dont le déphasage entre deux éléments voisins est de $\alpha=3\pi/2$.

IV)1°)Etablir l'expression de la résistance ohmique du dipôle idéal R_d .

2°)Calculer R_d sachant que la conductivité σ est égale à $3,610^{4}$ S/m , que le diamètre du dipôle est égal à 2,2 mm, la fréquence est de 150 Hz .

$\mu o=4\pi10^{-7}H/m$ $\ell = 1\,m$

Bon travail

FORMULAIRE DU MODULE ANTENNES ET PROPAGATION LIBRE

Equations de Maxwell en régime harmonique :

$\vec{rot}\,\vec{E} = -j\omega\vec{B}$ $\quad \vec{rot}\,\vec{H} = \vec{J} + j\omega\vec{D}$ $\quad div\,\vec{D} = \rho$

$div\,\vec{B} = 0$

Relations constitutives :

$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ $\quad \vec{B} = \mu\vec{H}$ $\quad \vec{J} = \sigma\vec{E}$

Puissance moyenne rayonnée:

$$P = \mathrm{Re}\left(\oiint \frac{1}{2}\left(\vec{E}\,x\,\vec{H}^{*}\right).\vec{dS}\right) ;$$

Potentiels :

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{rot}\,\vec{A} \;; \vec{E} = -\vec{grad}\,V - j\omega\vec{A} ;$$

$div\,\vec{A} + j\omega\varepsilon\mu V = 0$ (jauge de Lorentz)

Equation d'Helmholtz et sa solution :

$$\Delta\vec{A} + \beta^2\vec{A} = -\mu\vec{J}; \quad avec \quad \beta^2 = \omega^2\mu\varepsilon ;$$

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \frac{\vec{J}\,e^{-j\beta R}}{R}d\tau_P \leftrightarrow \frac{\mu}{4\pi}\int_{source}\frac{I e^{-j\beta R}}{R}\vec{dl}_P$$

Dipôle Idéal dans la région de champ lointain :

$$\vec{E} = j\omega\mu\frac{I\Delta z}{4\pi r}e^{-j\beta r}\sin\theta.\vec{u}_\theta ;$$

$$\vec{H} = j\beta\frac{I\Delta z}{4\pi r}e^{-j\beta r}\sin\theta.\vec{u}_\varphi \;; \zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = 120\pi$$

Dipôle de dimension finie :

$$\vec{H} = j\beta\frac{\sin\theta}{\mu}.A_z\vec{u}_\varphi \;; \vec{E} = -j\omega A_\theta\vec{u}_\theta$$

Limite de la région de champ proche : $r = \frac{2D^2}{\lambda}$

Cas général (champ lointain)

$$\vec{E} = -j\omega(A_\theta\vec{u}_\theta + A_\varphi\vec{u}_\varphi); \vec{u}_r\,x\,\vec{E} = \zeta\vec{H}$$

Champ normalisé : $F(\theta,\varphi) = \frac{E}{E_{max}}$

Diagramme de puissance normalisée :

$\mathcal{P}(\theta,\varphi) = |F(\theta,\varphi)|^2$

Intensité de rayonnement :

$$U(\theta,\varphi) = \frac{1}{2\zeta}\left|\vec{E}\right|^2 r^2 \;; U_{moy} = \frac{P}{4\pi}$$

Directivité : $D(\theta,\varphi) = \frac{U(\theta,\varphi)}{U_{moy}} = \frac{4\pi}{\Omega_A}|F(\theta,\varphi)|^2$;

$$\Omega_A = \iint |F(\theta,\varphi)|^2 d\Omega, D = \frac{U_{max}}{U_{moy}} = \frac{4\pi}{\Omega_A}$$

Gain : $G(\theta,\varphi) = \frac{4\pi U(\theta,\varphi)}{P_e}$; $G = \frac{4\pi U_{max}}{P_e}$

Efficacité du rayonnement : $e_r = \frac{P}{P_e}$

Dipôle demi-onde :

$$I(z) = I_m\sin\left[\beta\left(\frac{\lambda}{4} - |z|\right)\right] pour \quad |z| \le \frac{\lambda}{4}$$

champ normalisé : $F(\theta) = \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\cos\theta\right]}{\sin(\theta)}$

Impédance d'antenne : $Z_A = R_r + R_d + jX_A$; $R_r = \frac{2P}{|I|^2}$

Epaisseur de peau $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$;

$P_e = P + P_d$; $R_A = R_r + R_d$; $R_A = \frac{2P_e}{|I|^2}$

dipôle magnétique : $\vec{A} = j\beta S\mu\frac{I}{4\pi r}e^{-j\beta r}\sin\theta\,\vec{u}_\varphi$

spire circulaire : $L = \mu b\left[Log\left(\frac{8b}{a}\right) - 1{,}75\right]$

pour $a << b$;b :rayon de la spire ; a : rayon du fil

Antenne à la réception :

$P_{max}(réçue) = \frac{1}{8}\frac{|V|^2}{R_r}$; $Pmax = \left|\vec{S}\right|A_{emax}$;

A_{emax} :surface équivalente maximale de réception.

$D = \frac{4\pi}{\lambda^2}A_{emax}$; $\lambda^2 = \Omega_A A_{emax}$; $A_e = e_r A_{emax}$;

$G = \frac{4\pi}{\lambda^2}A_e$

Formule de FRIIS : $P_R = P_E G_E G_R\left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2$

$EIRP = P_E G_E = 4\pi U_{max}$.

RESEAUX LINEAIRES EQUIDISTANTS UNIFORMEMENT EXCITES :

Facteur de réseaux normalisé :

$$FR_n = \frac{\sin\left(N\frac{\psi}{2}\right)}{N\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)}; \psi = \beta d\cos\theta + \alpha$$

Champ du réseau :

E(réseau)=E(élément singulier)xFR

DS ANT 2014-2015

(1)

I) 1°) a) $\vec{A}(M) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{dipôle} \frac{I(z_p) e^{-j\beta R}}{4\pi R} dz_p \vec{k}$

on prend $R \simeq r \Rightarrow \vec{A}(M) = \frac{\mu_0 e^{-j\beta r}}{4\pi r} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} I_0 \left(1 - \frac{2|z_p|}{l}\right) dz_p \vec{k}$

$\vec{A}(M) = \frac{2\mu_0 e^{-j\beta r}}{4\pi r} I_0 \int_0^{\frac{l}{2}} \left(1 - \frac{2z_p}{l}\right) dz_p \vec{k}$

$u = 1 - \frac{2z_p}{l}$; $du = -\frac{2}{l} dz_p \Rightarrow dz_p = -\frac{l}{2} du$

$A(M) = \frac{\mu_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r} I_0 \int_1^0 u(-)\frac{l}{2} du \vec{k} = \frac{\mu_0 I_0 e^{-j\beta r}}{4\pi r} \int_0^1 u\, du \vec{k}$

$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 I_0 e^{-j\beta r}}{4\pi r} \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 \vec{k} = \frac{\mu_0 I_0 l e^{-j\beta r}}{8\pi r} \vec{k}$; $\vec{k} = \cos\theta \vec{u_r} - \sin\theta \vec{u_\theta}$

RC $\Rightarrow \vec{E} = -j\omega A_\theta \vec{u_\theta} = j\omega A_z \sin\theta \vec{u_\theta}$

$\vec{E} \simeq j\omega \frac{\mu_0 I_0 l e^{-j\beta r}}{8\pi r \beta} \sin\theta \vec{u_\theta}$

$\vec{H} = \frac{\vec{u_r} \wedge \vec{E}}{\eta} = j\omega \frac{\mu_0 I_0}{\eta_0} \frac{l e^{-j\beta r}}{8\pi r} \sin\theta \vec{u_\varphi}$

b) $E_\varphi = j\omega \frac{\mu_0 I_0 l e^{-j\beta r}}{8\pi r} \sin\psi$

$H_\chi = j\beta \frac{I_0 l e^{-j\beta r}}{8\pi r} \sin\psi$

ψ ? $\cos\psi = \vec{u_r} \cdot \vec{i} = (\cos\theta \vec{k} + \sin\theta \vec{u_R}) \cdot \vec{i}$

$= (\cos\theta \vec{k} + \sin\theta \cos\varphi \vec{i} + \sin\theta \sin\varphi \vec{j}) \vec{i}$

$= \sin\theta \cos\varphi$; $\sin\psi = \sqrt{1 - \cos^2\psi}$

$\sin\psi = \sqrt{1 - \sin^2\theta \cos^2\varphi}$

$$E_\varphi = j\omega\mu_0 \frac{I_0}{8\pi r} e^{-j\beta r} \sqrt{1-\sin^2\theta\cos^2\varphi}$$

$$H_\chi = j\frac{\beta I_0}{8\pi r} e^{-j\beta r} \sqrt{1-\sin^2\theta\cos^2\varphi}$$

2) a) $U(\theta,\varphi) = R_r [\;] r^2$

$$\vec{R} = \frac{1}{2} Re\; E_\varphi \vec{u}_\varphi \wedge H_\chi^* \vec{u}_\chi$$

$(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_\chi)$ trièdre direct

$$\vec{u}_\varphi \wedge \vec{u}_\chi = \vec{u}_r$$

$$R_r = \frac{1}{2} \frac{\omega\mu_0\beta |I_0|^2}{(8\pi r)^2} (1-\sin^2\theta\cos^2\varphi)$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{\omega\mu_0\beta |I_0|^2}{(8\pi)^2} (1-\sin^2\theta\cos^2\varphi)$$

b) Puissance rayonnée

$$P = \iint U\, d\Omega \qquad d\Omega = \sin\theta\, d\theta d\varphi$$

Moyen.

$$P = \frac{1}{2} \frac{\omega\mu\beta |I_0|^2}{(8\pi)^2} \left[\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi - \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi \right]$$

$$\int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi = \pi + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} = +1+1 = 2$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

(3)

$$\int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta = -\int_0^{\pi} (1-\cos^2\theta)\, d\cos\theta = -\int_1^{-1} (1-u^2)\, du$$

$$= \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3}\right)$$

$$= 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\, d\varphi = \pi + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$P = \frac{1}{2}\frac{\omega\mu\beta |I_0|^2}{(8\pi)^2}\underbrace{\left[4\pi - \frac{4\pi}{3}\right]}_{8\pi/3} =$$

$$\boxed{P = \frac{\omega\mu\beta |I_0|^2}{48\pi}}$$

c) $D = \dfrac{4\pi U_{max}}{P}$, $U_{max} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\omega\mu\beta |I_0|^2}{(8\pi)^2}$

$$D = 4\pi \times \frac{1}{2}\frac{\omega\mu\beta |I_0|^2}{(8\pi)^2} \Big/ \frac{\omega\mu\beta |I_0|^2}{48\pi} = \frac{48\pi}{2(8\pi)^2} \cdot 4\pi = \frac{1}{2}\frac{192}{64} = \frac{3}{2}$$

II) $\vec{A} = \beta S \mu \frac{I}{4\pi r} e^{-j\beta r} \sin\theta \vec{u}_\varphi$

$\vec{E} = -j\omega A_\varphi \vec{u}_\varphi = -j\omega\beta S\mu \frac{I_0}{4\pi r} e^{-j\beta r} \sin\theta \vec{u}_\varphi$

$\vec{H} = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}}{\eta} = -\frac{\omega\mu\beta S}{\eta} \frac{I_0 e^{-j\beta r}}{4\pi r} \sin\theta \vec{u}_\varphi$

$\vec{H} = -\frac{\beta^2 S I_0 e^{j\beta r}}{4\pi r} \sin\varphi e^{-j\beta r} \sin\theta \vec{u}_\varphi$

$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \vec{E} \wedge \vec{H}^* = \frac{1}{2} \frac{|E|^2}{\eta} \vec{u}_r = \frac{(\omega\beta\mu S)^2 |I_0|^2}{2\eta(4\pi r)^2} \sin^2\theta \vec{u}_\varphi$

$\frac{\omega\mu}{\eta} = \beta = \frac{\eta\beta^4 S^2 |I_0|^2 \sin^2\theta}{2(4\pi r)^2} \vec{u}_r$

$P = \iint \vec{\mathcal{P}} \cdot d\vec{S} = \frac{\eta\beta^4 S^2 |I_0|^2}{2(4\pi)^2} \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$

$= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{\eta\beta^4 S^2 |I_0|^2}{2(4\pi)^2} \frac{4}{3} \times 2\pi$

$P = \frac{\eta\beta^4 S^2 |I_0|^2}{12\pi}$ comme $\eta = 120\pi$

$P = 10 (\beta^2 S |I_0|)^2$

3°) a) $R^r = \frac{e^r}{|I_0|^r} = 10\beta^4 S^2$

$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow R^r = 2\times 10 \times (2\pi)^4 \left(\frac{S}{\lambda^2}\right)^2$

$$\boxed{R^r = 31171 \left(\frac{S}{\lambda^2}\right)^2}$$

b) on peut augmenter R^r en augmentant le nombre N de spires, dans ce cas on remplacera S par NS

c) $R_d = \frac{R_s L}{2\pi a}$ avec $R_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$

L est le périmètre moyen de la spire et a est le rayon de la spire

σ : conductivité $\omega = 2\pi f$

4°) a) $R^r = 31171 \left(\pi \frac{\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2}{X^2}\right) =$ ~~0,2711 188,0818~~ Ω

(~~0,27 18~~ avec 31200)

b) $L = \mu b \left[\log \frac{8b}{a} - 1{,}75\right]$

$X = \omega L = 2\pi \frac{c}{\lambda} \times \mu \frac{L}{2\pi} \left[\log \frac{8L/2\pi}{a} - 1{,}75\right]$

$= 3.10^8 \times 4\pi 10^{-7} \times 0{,}25 \left[\log \frac{8\times 0{,}25}{2\pi \times 0{,}0015/2} - 1{,}75\right]$

$= 405{,}334\ \Omega$

$R_d = R_s \frac{L}{2\pi a} = 0,0260\,\Omega$

d) $Z_A = R_r + R_d + jX_A$

$Z_A = (0,7971 + j\,405,33)\,\Omega$

e) $e_r = \frac{R_r}{R_r + R_d} = 96,74\,\%$

IV

$R_d = \rho \frac{\ell}{S}$

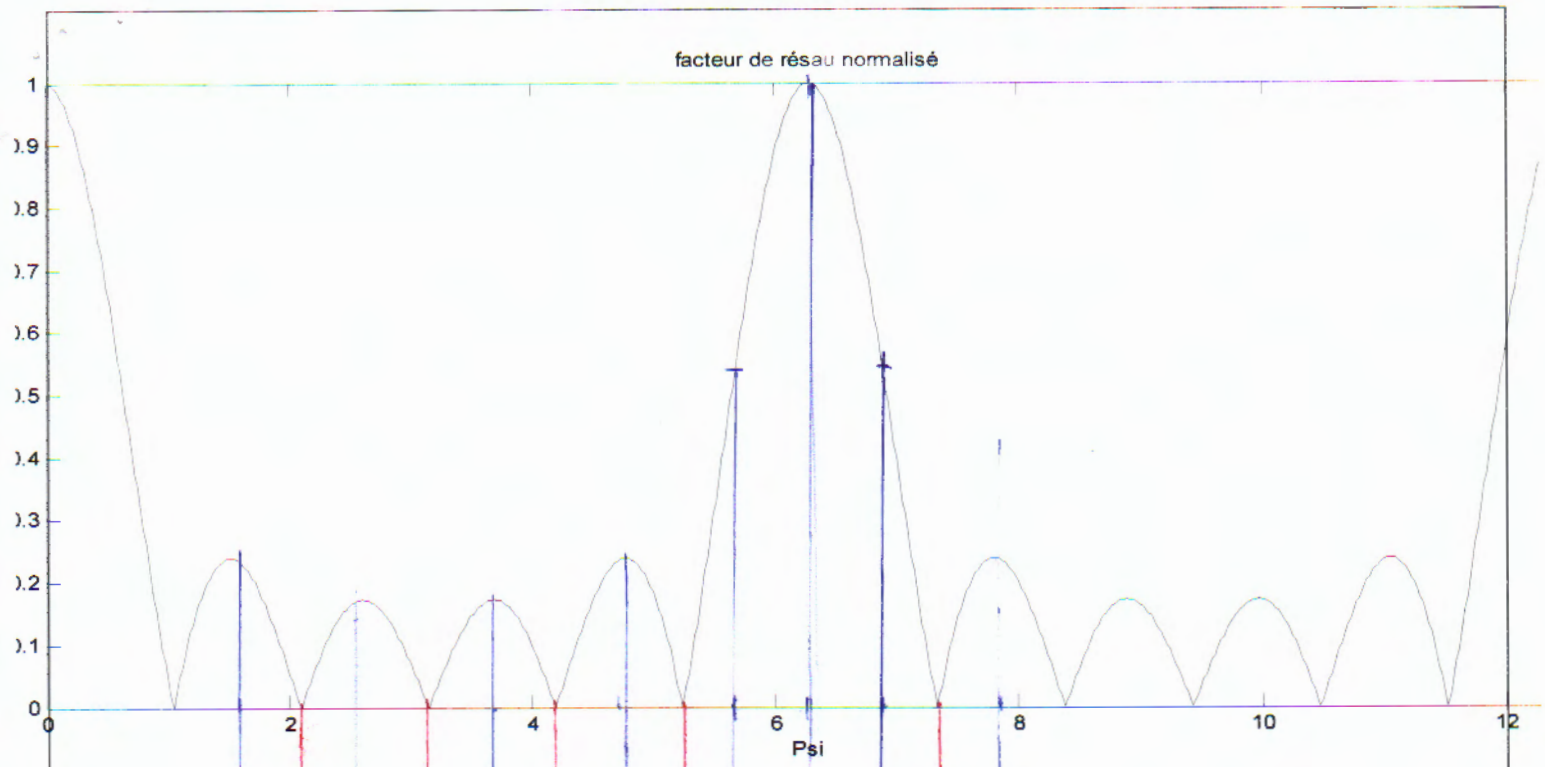
$= \frac{1}{\sigma} \frac{\ell}{2\pi a \times \delta}$

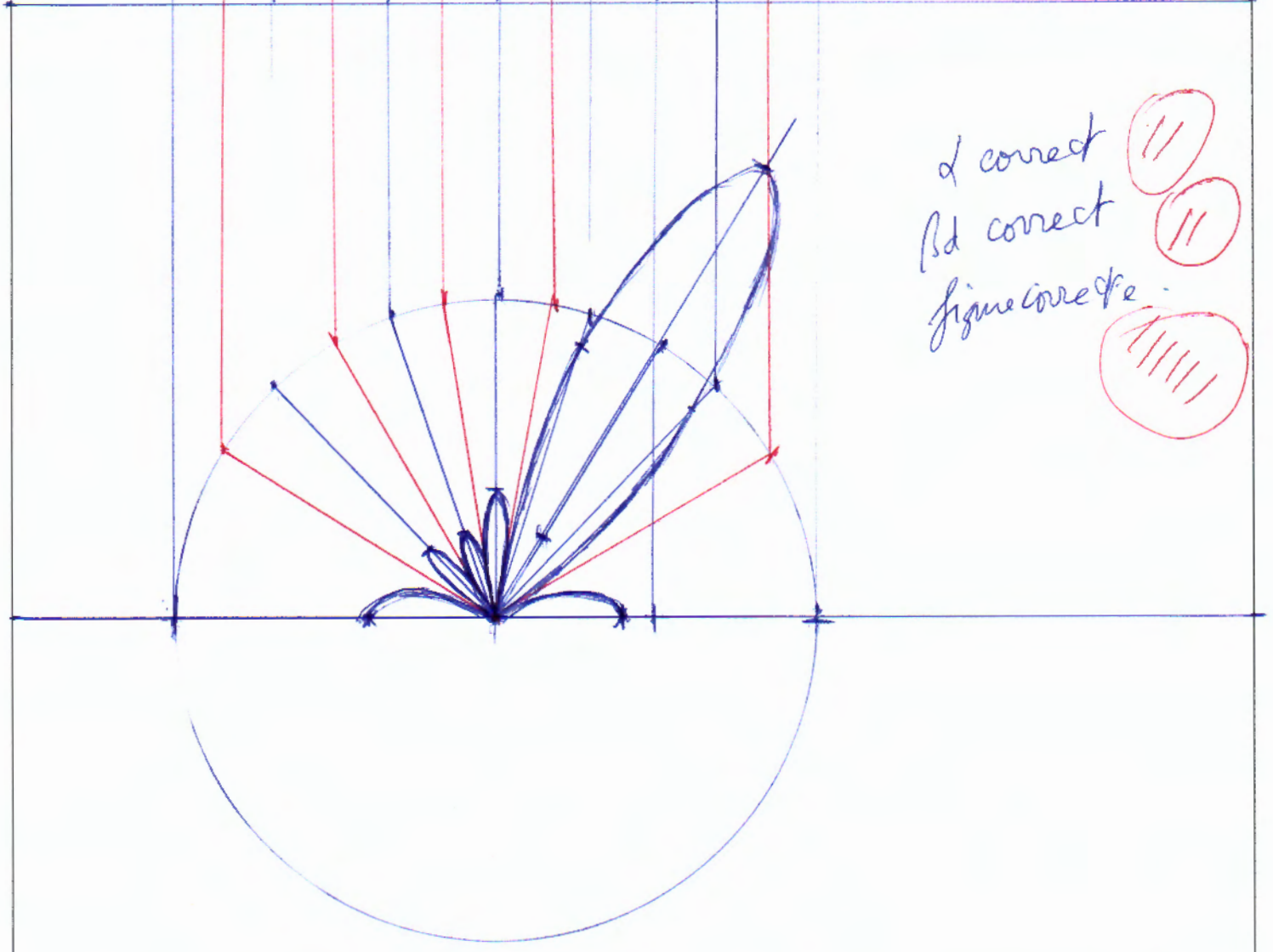
$\frac{1}{\sigma\delta} = \frac{1}{\sigma\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$

$= \frac{1}{\sigma\delta} \frac{\ell}{2\pi a} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \frac{\ell}{2\pi a}$

3) $\ell = 1\,m$

A.N $R_d = 9,28\ 10^{-3}\,\Omega$





α correct //
βd correct //
figure correcte ////

ENIG GCR2

ANNEE UNIVERSITAIRE 2016/2017

Durée : 2H00. ***Documents non autorisés.***

Enseignant responsable : Mr BENZINA.H

DS ANTENNES ET PROPAGATION LIBRE

I) Soit une spire rayonnante carré parcourue par un courant électrique $I(M,t) = I_o e^{j\omega t}$ où I_o est une constante.

On place la spire carré de côté d, dans le plan xOy, de telle manière que son centre coïncide avec l'origine du système de coordonnées.

1°) a)Tracer une figure illustrant la spire en présence du point M et du système de coordonnées.

b)Trouver l'expression du potentiel vecteur $\vec{A}(M)$, en fonction des distances R_1, R_2, R_3 et R_4, entre les points centraux de chaque côté du carré et le point M.

2°) Le point M est considéré, dans cet exercice comme un point éloigné; tout en justifiant votre réponse, quelles approximations doit-on faire, sur R_1, R_2, R_3 et R_4 :

a) Pour les termes d'amplitude.

b) Pour les termes de phase. (Une réponse non justifiée est considérée comme fausse).

3°) En tenant compte du résultat de la question 2°), et en considérant que $d<<\lambda$ réécrire l'expression de $\vec{A}(M)$ et la réduire sous sa forme la plus simple possible.

4°) a) Obtenir le champ $\vec{E}(M)$.

b) Obtenir le champ $\vec{H}(M)$.

II) Un dipole demi-onde, dont R_d = 1,5 Ω (résistance de dissipation), est connecté à un générateur dont l'impédance interne est (55+j30)Ω . En supposant que la tension maximale délivrée par le générateur est 3 V et que l'impédance du dipôle est (73+j42.5),

1°)représenter l'ensemble antenne+générateur par un circuit équivalent.

2°) Trouver la puissance:

a) fournie par la source (réelle)

b) rayonnée par l'antenne

c) dissipée par l'antenne

III) Soit un point M dans la région de champ lointain ; établir l'expression du potentiel vecteur $\vec{A}(M)$ dû à un dipôle de dimension finie de longueur ℓ disposé sur l'axe Oz, centré en O et parcouru par un courant quelconque I(P)***exp jωt***..

2°)déduire les expressions de $\vec{E}(M)$ puis déduire $\vec{H}(M)$.

3°)On dispose d'un dipôle demi-onde :

a) Donner l'expression du courant I(z) et tracer son profil.

b) Calculer dans ce cas le potentiel vecteur $\vec{A}(M)$

c)A partir de l'expression de $\vec{A}(M)$, déduire celle de $\vec{E}(M)$.

d)Déduire l'expression du champ normalisé F(θ)

e)Déduire l'expression de $\vec{H}(M)$

f) Déduire l'expression du vecteur de Poynting $\vec{R}$.

g)Déduire l'intensité de rayonnement U(θ).

IV) Quel est le champ normalisé d'un réseau linéaire (selon l'axe Oz), composé de 6 dipôles demi-ondes, parallèles, disposés selon l'axe Oy, équidistants ($d = 3\lambda/4$), excités uniformément et dont le déphasage entre deux éléments voisins est de $\alpha = 9\pi/4$.

2°) Tracer, en polaires, le diagramme de rayonnement du facteur de réseau normalisé dans la feuille jointe avec le sujet d'examen..

Equations de Maxwell en régime harmonique :

$\vec{rot}\,\vec{E} = -j\omega\vec{B}$; $\vec{rot}\,\vec{H} = \vec{J} + j\omega\vec{D}$; $div\,\vec{D} = \rho$;

$div\,\vec{B} = 0$

Relations constitutives :

$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$; $\vec{B} = \mu\vec{H}$; $\vec{J} = \sigma\vec{E}$

Relations de continuité :

$\vec{n} \wedge (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = \vec{0}$; $\vec{n} \wedge (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s$;

$\vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma$; $\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$

Puissance moyenne rayonnée:

$P = \mathrm{Re}\left(\oiint \frac{1}{2}\left(\vec{E} \wedge \vec{H}^* \right) \cdot d\vec{S} \right)$;

Potentiels :

$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{rot}\,\vec{A}$; $\vec{E} = -\vec{grad}\,V - j\omega\vec{A}$;

$div\,\vec{A} + j\omega\varepsilon\mu V = 0 (jauge\ de\ Lorentz)$

Equation d'Helmholtz et sa solution :

$\Delta\vec{A} + \beta^2\vec{A} = -\mu\vec{J}$; $avec \quad \beta^2 = \omega^2\mu\varepsilon$;

$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \frac{\vec{J}\,e^{-j\beta R}}{R} d\tau_P \leftrightarrow \frac{\mu}{4\pi}\int_{source} \frac{I\,e^{-j\beta R}}{R}\vec{dl}_P$

$\zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = 120\pi\,(\Omega)$

Limite de la région de champ proche :

$r = \frac{2D^2}{\lambda}$

Cas général (champ lointain)

$\vec{A} = \frac{\mu e^{-j\beta R}}{4\pi r}\iiint_V \vec{J}\,e^{j\beta\vec{u}_r\cdot\vec{r}'} d\tau_P$; $\vec{r}' = \vec{OP}$

$\vec{E} = -j\omega(A_\theta\vec{u}_\theta + A_\varphi\vec{u}_\varphi)$

$\vec{u}_r \wedge \vec{E} = \zeta\vec{H}$

Champ normalisé : $F(\theta,\varphi) = \frac{E}{E_{max}}$

Diagramme de puissance normalisée :

$\mathcal{P}(\theta,\varphi) = |F(\theta,\varphi)|^2$

Intensité de rayonnement :

$U(\theta,\varphi) = \frac{1}{2\zeta}\left|\vec{E}\right|^2 r^2$; $U_{moy} = \frac{P}{4\pi}$

Directivité :

$D(\theta,\varphi) = \frac{U(\theta,\varphi)}{U_{moy}} = \frac{4\pi}{\Omega_A}|F(\theta,\varphi)|^2$;

$\Omega_A = \iint |F(\theta,\varphi)|^2 d\Omega$, $D = \frac{U_{max}}{U_{moy}} = \frac{4\pi}{\Omega_A}$

Gain :

$G(\theta,\varphi) = \frac{4\pi U(\theta,\varphi)}{P_e}$; $G = \frac{4\pi U_{max}}{P_e}$

Efficacité du rayonnement : $e_r = \frac{P}{P_e}$

Impédance d'antenne :

$Z_A = R_r + R_d + jX_A$; $R_r = \frac{2P}{|I|^2}$

Epaisseur de peau $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$.

Conducteur cylindrique :

$R_d = R_s\frac{l}{2\pi a}$; $R_S = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$

$P_e = P + P_d$; $R_A = R_r + R_d$; $R_A = \frac{2P_e}{|I|^2}$

Monopole :

$R_r(\text{Monopole}) = \frac{1}{2}R_r(\text{Dipole})$;

$D(\text{Monopole}) = \frac{1}{2}D(\text{Dipole})$

$Z_e(\text{Monopole}) = \frac{1}{2}Z_e(\text{Dipole})$

dipôle magnétique -spire circulaire :

inductance : $L = \mu b\left[Log\left(\frac{8b}{a}\right) - 1{,}75\right]$ $pour\ a << b$

b :rayon de la spire ; a : rayon du fil

Antenne à la réception :

$P_{max}(\text{réçue}) = \frac{1}{8}\frac{|V|^2}{R_r}$

$Pmax = \left|\vec{S}\right| A_{e\,max}$; $A_{e\,max}$:surface équivalente maximale de réception.

$D = \frac{4\pi}{\lambda^2}A_{e\,max}$; $\lambda^2 = \Omega_A A_{e\,max}$

$A_e = e_r A_{e\,max}$; $G = \frac{4\pi}{\lambda^2}A_e$

Formule de FRIIS :

$P_R = P_E G_E G_R\left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2$

$EIRP = P_E G_E = 4\pi U_{max}$.

RESEAUX LINEAIRES EQUIDISTANTS UNIFORMEMENT EXCITES :

Facteur de réseaux normalisé :

$FR_n = \frac{\sin\left(N\frac{\psi}{2}\right)}{N\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)}$; $\psi = \beta d\cos\theta + \alpha$

Champ du réseau :

E(réseau)=E(élément singulier)xFR

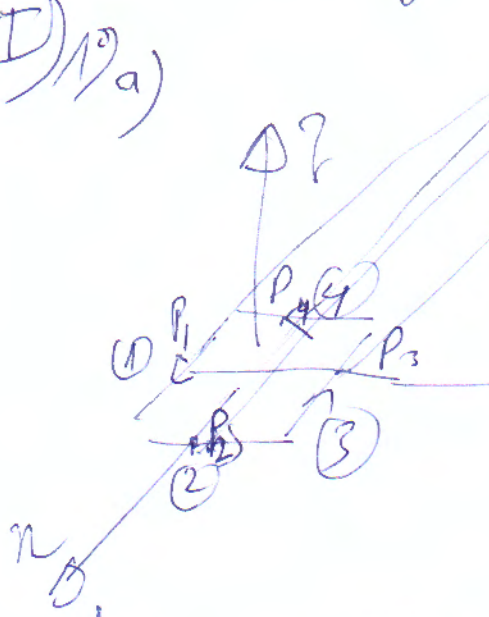
$\mu_o = 4\pi 10^{-7}$ F/m

$\int \sin(a+bx)\exp(cx)dx = \frac{\exp(cx)}{b^2+c^2}[c\sin(a+bx) - b\cos(a+bx)]$

Corrigé DS An 1 – 2016-2017 – ENIG

(1)

I) 1°) a)



b) $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left\{\left[\frac{e^{-j\beta R_1}}{R_1} - \frac{e^{-j\beta R_3}}{R_3}\right]\vec{i} + \left[\frac{e^{-j\beta R_2}}{R_2} - \frac{e^{-j\beta R_4}}{R_4}\right]\vec{j}\right\}$

On va supposer que $R \simeq r$ pour le terme d'amplitude de l'enlacement

b) $R_1 = \|\overrightarrow{P_1M}\|$, $\overrightarrow{P_1M} = \overrightarrow{P_1O} + \overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + \frac{d}{2}\vec{j}$

$\|\overrightarrow{P_1M}\| = \sqrt{r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 + 2r\frac{d}{2}\vec{u}_r \cdot \vec{j}}$

	$\vec{u}_\rho$	$\vec{u}_\varphi$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\cos\varphi$	$-\sin\varphi$	0
$\vec{j}$	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	0
$\vec{k}$	0	0	1

θ	$\vec{u}_r$	$\vec{u}_\theta$	$\vec{u}_\varphi$
$\vec{k}$	$\cos\theta$	$-\sin\theta$	0
$\vec{u}_\rho$	$\sin\theta$	$\cos\theta$	0
$\vec{u}_\varphi$	0	0	1

$\vec{j} = \sin\varphi\vec{u}_\rho + \cos\varphi\vec{u}_\varphi$
$= \sin\varphi\sin\theta\vec{u}_r + \sin\varphi\cos\theta\vec{u}_\theta + \cos\varphi\vec{u}_\varphi$

$\vec{u}_r \cdot \vec{j} = \sin\varphi\sin\theta$ $\quad d \ll r \Rightarrow R_1 = r\sqrt{1 + \left(\frac{d}{2r}\right)^2 + \frac{d}{r}\sin\varphi\sin\theta}$

$R_1 \simeq r\left(1 + \frac{d}{2r}\sin\varphi\sin\theta\right) = r + \frac{d}{2}\sin\varphi\sin\theta$ $\ll$

$R_3 = \|\overrightarrow{P_3M}\|$; $\overrightarrow{P_3M} = \overrightarrow{P_3O} + \overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r - \frac{d}{2}\vec{j}$

donc même démarche que pour R_1 sauf qu'il y a une fois (−) $\Rightarrow$

$R_3 \simeq r - \frac{d}{2}\sin\varphi\sin\theta$,

Pour R_2 on a :

$R_2 = P_2M \Rightarrow \overrightarrow{P_2M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP_2} = r\vec{u}_r - \frac{d}{2}\vec{i}$

$\Rightarrow R_2 = \sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4} - rd\vec{u}_r \cdot \vec{i}}$; $\vec{i} = \cos\varphi\vec{u}_\rho - \sin\varphi\vec{u}_\varphi$

$\vec{\imath} = \cos\varphi \sin\theta \vec{u_r} + \cos\varphi\cos\theta \vec{u_\theta} - \sin\varphi \vec{u_\varphi}$

$\vec{\imath}\cdot\vec{u_r} = \cos\varphi\sin\theta$ d'où

$$R_2 \simeq r\left(1 + \frac{d^2}{4r^2} - \frac{d}{r}\cos\varphi\sin\theta\right)^{1/2} \simeq r\left(1 - \frac{d}{2r}\cos\varphi\sin\theta\right)$$

$\left(\frac{d^2}{4r^2} \ll\right)$

$$\boxed{R_2 \simeq r - \frac{d}{2}\cos\varphi\sin\theta}$$

(2)

donc de même pour R_4

$R_4 = P_4M \Rightarrow \vec{R_4} = \vec{OM} - \vec{OP_4} = r\vec{u_r} + \frac{d}{2}\vec{\imath}$

$$\Rightarrow \boxed{R_4 \simeq r + \frac{d}{2}\cos\varphi\sin\theta}$$

3°) $\vec{A}(M) \simeq e^{-j\beta r}\frac{\mu_0 I_0 d}{4\pi r}\left\{\left[e^{-j\beta\frac{d}{2}\sin\varphi\sin\theta} - e^{+j\beta\frac{d}{2}\sin\varphi\sin\theta}\right]\vec{\imath}\right.$

$$\left. + \left[e^{+j\beta\frac{d}{2}\cos\varphi\sin\theta} - e^{-j\beta\frac{d}{2}\cos\varphi\sin\theta}\right]\vec{\jmath}\right\}$$

$$\simeq e^{-j\beta r}\frac{\mu_0 I_0 d}{4\pi r}\left\{-2j\sin\left(\beta\frac{d}{2}\sin\varphi\sin\theta\right)\vec{\imath} + 2j\sin\left(\beta\frac{d}{2}\cos\varphi\sin\theta\right)\vec{\jmath}\right\}$$

$\beta d = \frac{2\pi}{\lambda} d \ll \Rightarrow$

$$\vec{A}(M) \simeq j\frac{\mu_0 I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r}\left\{-\frac{\pi d}{\lambda}\sin\varphi\sin\theta\vec{\imath} + \frac{\pi d}{\lambda}\cos\varphi\sin\theta\vec{\jmath}\right\}$$

$$= j\frac{\mu I_0 d^2 e^{-j\beta r}}{2r\lambda}\sin\theta\left\{\underbrace{-\sin\varphi\vec{\imath} + \cos\varphi\vec{\jmath}}_{\vec{u_\varphi}}\right\}$$

$$\vec{A}(M) \simeq j\frac{\mu\beta I_0 S e^{-j\beta r}}{4\pi r}\sin\theta\vec{u_\varphi} \quad ; \quad d^2 = S \quad (\text{surface de la spire carrée})$$

4/ $\underline{E}(M) \simeq j\omega A_\theta \vec{u}_\theta - j\omega A_\varphi \vec{u}_\varphi$

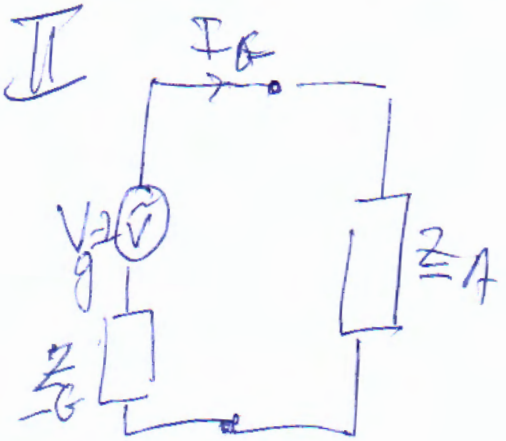
$A_\theta = 0 \Rightarrow$

$$\vec{E}(M) = \frac{\omega \mu \beta I_0 S_e}{4\pi r} e^{-j\beta r} \sin\theta \, \vec{u}_\varphi$$

5) $\vec{H}(M) = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}(M)}{\zeta}$

$$\boxed{\vec{H}(M) = -\frac{\beta^2 I_0 S_e}{4\pi r} e^{-j\beta r} \sin\theta \, \vec{u}_\theta}$$

II



$$\underline{Z}_A = R_d + R^r + jX_A$$

$$Z_G = R_G + jX_G$$

$$\underline{I}_A = \frac{V_g}{(R_d + R_G + R^r) + j(X_A + X_G)}$$

$$= \frac{2}{129,5 + j72,5}$$ on a supposé que R_d ne fait pas partie de R_A

ou bien $\underline{I}_{b2} = \frac{3}{128 + j72,5}$ on a supposé que R_d fait partie de R_A

2) a) puissance fournie (Deuxième cas)

$$P_f = R_e\left(\frac{1}{2} V_g I_f^*\right) = \frac{1}{2} R_e \, V_g \frac{V_g^*}{Z_{éch}^*} = \frac{1}{2} \frac{9^{Eq}}{128 - j72,5}$$

$$P_g = \frac{1}{2}\frac{R_e (128)}{(128)^2 + (725)^2} = (26,62 + j\,15,08)\,mW$$

$$= 26,62\ mW$$

b) Puissance rayonnée (Premier cas)

$$P = \frac{1}{2} R^r |I_g|^2 = 14,87\ mW$$

c) Puissance dissipée (Premier cas)

$$P_d = \frac{1}{2} R_d |I_g|^2 = 0,3119\ mW$$

Pour le premier cas c'est à dire en supposant R_d non comprise dans R_e 73 Ω on aura

$P_g = 26,46\ mW$

$P = 14,91\ mW$

$P_d = 0,3064\ mW$

III) $$\vec{A}(M) = \frac{\mu}{4\pi(E)} \int_{-l/2}^{+l/2} I(P) \frac{e^{-j\beta R}}{R}\, dz_p\, \vec{k}$$

Pour le terme d'amplitude $R \simeq r$ pour le terme de phase $R \simeq r - z_p \cos\theta$



$$\vec{A}(M) = \frac{\mu}{4\pi r} e^{-j\beta r} \int_{-l/2}^{+l/2} I(P)\, e^{j\beta z_p \cos\theta}\, dz_p\, \vec{k}$$

2) $\vec{k} = \cos\theta \vec{u_r} - \sin\theta \vec{u_\theta}$

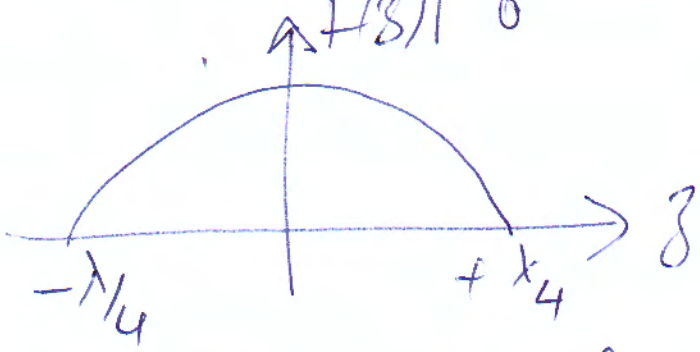
$\vec{E} \simeq -j\omega \vec{A_\theta} \vec{u_\theta} = j\omega\mu \frac{\sin\theta\, e^{-j\beta r}}{4\pi r} \left(\int_{-\ell/2}^{+\ell/2} I(z_p) e^{j\beta z_p \cos\theta} dz_p \right) \vec{u_\theta}$

$\vec{H} = \frac{\vec{u_r} \wedge \vec{E}}{\eta} = j \frac{\beta \sin\theta\, e^{-j\beta r}}{4\pi r} \underbrace{\left(\int_{-\ell/2}^{+\ell/2} I(z_p) e^{j\beta z_p \cos\theta} dz_p \right)}_{J} \vec{u_\varphi}$

$\vec{u_r} \wedge \vec{u_\theta} = \vec{u_\varphi}$

$\frac{\omega\mu}{\beta} = \beta$

3) a) $I(z) = \begin{cases} I_0 \sin\left[\beta\left(\frac{\lambda}{4} - |z_p|\right)\right] & \text{pour } |z_p| < \frac{\lambda}{4} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$



b) Il faut calculer l'intégrale J

$J = \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} I_0 \sin\left[\beta\left(\frac{\lambda}{4} - |z_p|\right)\right] e^{j\beta z_p \cos\theta} dz_p$ tq.

$= J_1 + J_2$; $J_1 = \int_{-\ell/2}^{0}$ ( ) et $J_2 = \int_0^{+\ell/2}$

on utilise la formule donnée au formulaire on fait les développement (voir cours) et on obtient

$$\vec{A(M)} = \frac{\mu 2I_0}{\beta} \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \frac{\cos\left[(\pi/2)\cos\theta\right]}{\sin^2\theta} \vec{k}$$

c) $\vec{E} = -j\omega \vec{A(M)} = j\omega\mu \frac{2I_0}{\beta} \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi} \sin\theta \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\cos\theta\right]}{\sin^2\theta} \vec{u_\theta}$

d) $F(\theta) = \frac{E}{E_{max}} = \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\cos\theta\right]}{\sin\theta}$ $\left(E_{max} = F(\theta = \frac{\pi}{2})\right)$

e) $\vec{H} = j\beta \frac{2I_0}{\beta} \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \sin\theta \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\cos\theta\right]}{\sin^2\theta} \vec{u_\varphi}$

f) vecteur de Poynting

$$\vec{R} = \frac{|E|^2}{2\eta} \vec{u_r} = \frac{\omega^2\mu^2 |I_0|^2}{2\eta (2\pi r)^2} \frac{\cos^2\left[\frac{\pi}{2}\cos\theta\right]}{\sin^2\theta} \vec{u_r}$$

$$\vec{R} = \frac{\eta |I_0|^2}{8\pi^2 r^2} \frac{\cos^2\left[\frac{\pi}{2}\cos\theta\right]}{\sin^2\theta} \vec{u_r}$$

g) $U(\theta) = R_r \varphi^2$

$$= \frac{\eta |I_0|^2}{8\pi^2} \frac{\cos^2\left[\frac{\pi}{2}\cos\theta\right]}{\sin^2\theta}$$

(7)

IV) $N=6$; $\psi = \beta d \cos\theta + \alpha$

$$\psi = \frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{3\lambda}{4} \cos\theta + \frac{9\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}(2\cos\theta + 3)$$

$$FR_n = \frac{A \sin N\frac{\psi}{2}}{N A \sin\frac{\psi}{2}} = \frac{\sin\left[6 \times \frac{3\pi}{8}(2\cos\theta+3)\right]}{6 \sin\left[\frac{3\pi}{8}(2\cos\theta+3)\right]}$$

Champ normalisé (voir ex III)

$$F(\theta) \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\cos\gamma\right]}{\sin\gamma} \quad ; \quad \cos\gamma = \vec{u_r} \cdot \vec{j}$$

$$= \sin\varphi \sin\theta$$

(car I)

$$\sin\gamma = \sqrt{1-\cos^2\gamma} = \sqrt{1-\sin^2\varphi\sin^2\theta}$$

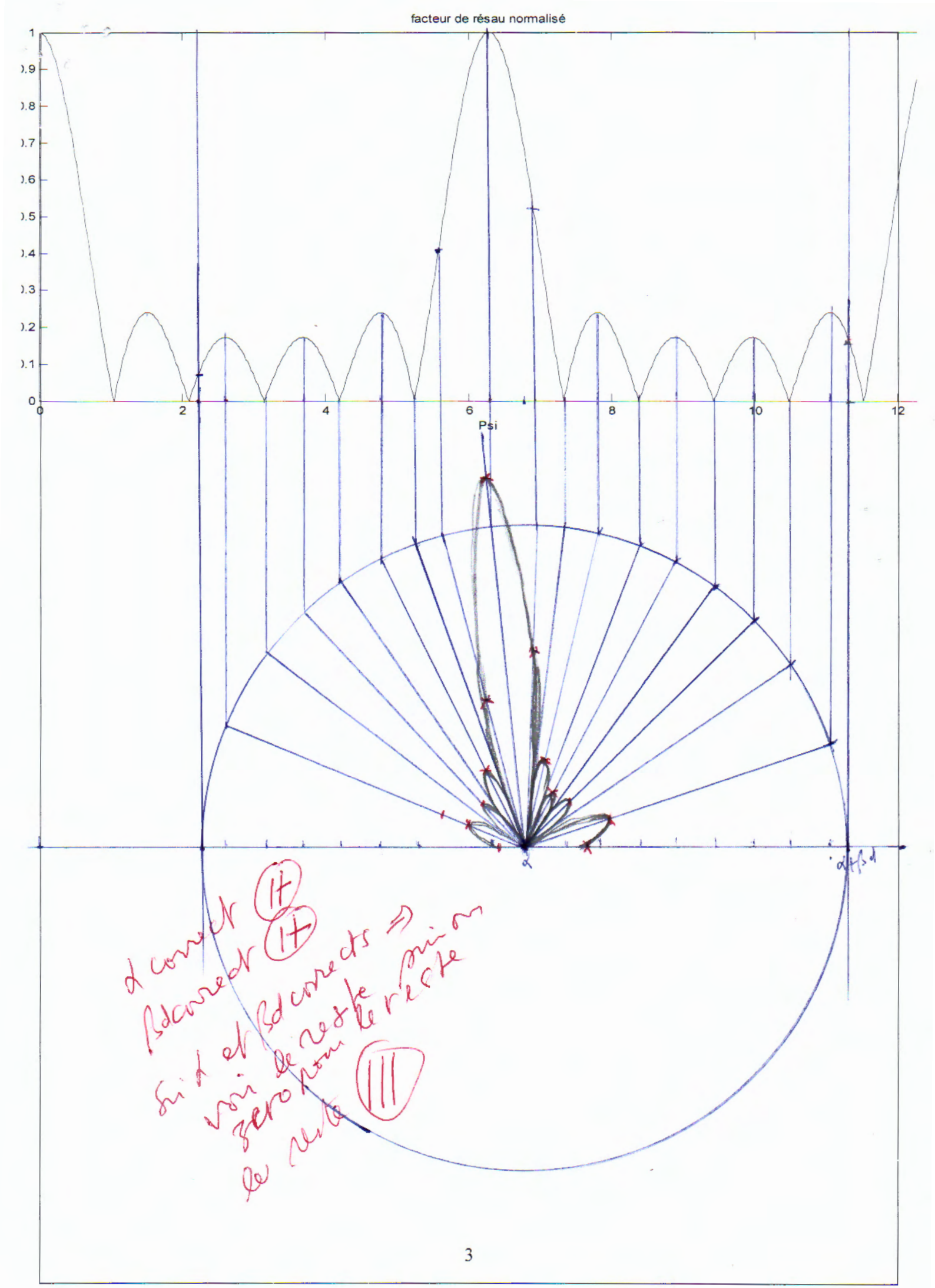
$$\mathcal{E}_n = FR_n \times F(\theta)$$

$$= \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\sin\varphi\sin\theta\right]}{\sqrt{1-\sin^2\varphi\sin^2\theta}} \cdot \frac{\sin\left[\frac{9}{4}\pi(2\cos\theta+3)\right]}{6\sin\left[\frac{3\pi}{8}(2\cos\theta+3)\right]}$$

2) 193 mm → 4π

α → $\beta d = \frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{3\lambda}{4} = \frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} = 1{,}5\pi = 72{,}38$ mm

φ → $\alpha = \frac{9}{4}\pi = 2{,}25\pi = 108{,}56$



d correct (1+)
Bd correct (1+)
Si d et Bd corrects ⇒ voir de reste pour zero pour la reste de reste (1/1)

ANNEE UNIVERSITAIRE
2004/2005

MERCREDI 12/01/2005
Durée : 2H00. ***Documents non autorisés.***
Enseignant responsable : Mr BENZINA.H

DS ANTENNES ET PROPAGATION LIBRE

Hypothèse générale : On travaille en régime temporel harmonique.

EXERCICE N°1

1°) Comment peut-on justifier l'existence d'un potentiel-vecteur magnétique $\vec{A}$?

2°) Etablir la relation suivante :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V - j\omega \vec{A}$$

3°)En utilisant la Jauge de Lorentz, établir l'équation de Helmholtz pour A :

$$\Delta \vec{A} + \omega^2 \mu \varepsilon = -\mu \vec{J}$$

EXERCICE N°2

1°) a) Quel est le champ électrique normalisé d'un réseau linéaire horizontal de 3 dipôles demi-onde horizontaux équidistants (d = 3λ/4), colinéaires, excités uniformément et dont le déphasage entre deux éléments voisins est de $\alpha = \pi$ ..
On rappelle que le champ électrique d'un dipôle demi-onde, dans la région de champ lointain est donné par :

$$E_\theta = j\omega\mu \frac{2 I_M}{\beta} \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \frac{\cos\left[(\pi/2)\cos\theta\right]}{\sin\theta}$$

2°) Tracer, en polaires, le diagramme de rayonnement du facteur de réseau normalisé dans la feuille jointe avec le sujet d'examen. (page 3)

PROBLEME :

Le dipôle court est celui dont le courant peut se modéliser par la fonction suivante :

$$I(z) = \begin{cases} I_A \left(1 - \frac{2|z|}{\Delta z}\right) ; \text{ pour } |z| \leq \frac{\Delta z}{2} \\ 0 \quad \text{partout ailleurs} \end{cases}$$

1°)a)Rappeler l'expression générale du potentiel-vecteur $\vec{A}$, pour un dipôle de longueur finie.
b)Calculer $\vec{A}$ dans le cas du dipôle court.
2°)Dans la région de champ lointain, obtenir l'expression du champ magnétique $\vec{H}$ du dipôle court, à partir de $\vec{A}$.
3°)Dans la région de champ lointain, obtenir l'expression du champ électrique $\vec{E}$ du dipôle court, à partir de $\vec{A}$.
4°)a)Quelle est l'expression du vecteur de Poynting complexe du dipôle court dans la région du champ lointain.
b)Calculer la puissance rayonnée à une distance r éloignée de l'antenne.
5°)a)Déduire l'expression de la résistance de rayonnement du dipôle court.
b) Application numérique : f = 0,1 GHz et Δz = 6 cm.
6°)a)Montrer que la résistance ohmique du dipôle court R_d est égale au 1/3 de celle d'un dipôle idéal.
b)Calculer R_d sachant que la conductivité σ est égale à $3{,}5.10^7$ s/m et que le diamètre du dipôle est égal à 2 mm.
c)Déduire l'efficacité de rayonnement de ce dipôle court.
7°)a)Quelle est l'intensité maximale de ce dipôle court.
b)Quelle est alors sa directivité.
c)Quel est l'angle solide de l'ouverture de ce dipôle court.
d)Quel est son gain.

Bon travail

CORRIGÉ DU DS ANTENNES ET PROPAGATION
LIBRE-ENIG - A.U 2004-2005 - GCR2 - BENIA

(1)

EXERCICE N°1 4 points

1°) $\vec{B} = \vec{rot}\,\vec{A}$ car $div\,\vec{B} = 0$ / (1/3)

2°) $\vec{rot}\,\vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} = -j\omega\,\vec{rot}\,\vec{A}$ / (1/3)

$\Rightarrow \vec{rot}(\vec{E} + j\omega\vec{A}) = \vec{0}$ / (1/3)

$\Rightarrow \vec{E} + j\omega\vec{A} = -\vec{grad}\,V$ / (1/3)

$\Rightarrow \vec{E} = -\vec{grad}\,V - j\omega\vec{A}$ / (1/3)

3°) $\vec{rot}\,\vec{H} = \vec{J} + j\omega\varepsilon\vec{E}$ / (1/3)

$\vec{rot}\left(\frac{1}{\mu}\vec{rot}\,\vec{A}\right) = \vec{J} + j\omega\varepsilon\vec{E}$ / (1/3)

$\frac{1}{\mu}\left(\vec{grad}\,div\,\vec{A} - \Delta\vec{A}\right) = \vec{J} + j\omega\varepsilon\vec{E}$ / (1/3)

$\vec{grad}\,div\,\vec{A} - \Delta\vec{A} = \mu\vec{J} - j\omega\mu\varepsilon\left(\vec{grad}\,V + j\omega\vec{A}\right)$ / (1/3)

$\vec{grad}\left(div\,\vec{A} + j\omega\varepsilon\mu V\right) - \Delta\vec{A} = \mu\vec{J} + \omega^2\mu\varepsilon\vec{A}$ / (1/3)

En posant que $div\,\vec{A} + j\omega\varepsilon\mu V = 0$ jauge de Lorentz / (1/3)

alors on obtient :

$$\boxed{\Delta\vec{A} + \omega^2\mu\varepsilon\vec{A} = -\mu\vec{J}}$$ / (1/3)

EXERCICE N°2 :

1°) le champ normalisé dû à un dipôle Angulier est

$$F(\theta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}$$ // (2/3)

le facteur de réseau normalisé pour 3 éléments équidistants est :

$$f(\psi) = \frac{\sin\left(\frac{3\psi}{2}\right)}{3\sin\frac{\psi}{2}}$$ 2/3

$$\left.\begin{aligned}\psi &= \beta d\cos\theta + \alpha \\ d &= \frac{3\lambda}{4} \quad \text{et} \quad \alpha = \pi\end{aligned}\right\} \Rightarrow \psi = \frac{2\pi}{\lambda}\times\frac{3\lambda}{4}\cos\theta + \pi$$ 1/3

$$\psi = \frac{3\pi}{2}\cos\theta + \pi \Rightarrow f(\psi) = \frac{\sin\left[\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\pi\cos\theta + \pi\right)\right]}{3\sin\left(\frac{3\pi}{4}\cos\theta + \frac{\pi}{2}\right)}$$ 1/3 ②

$$\left.\begin{aligned}\sin\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right) &= +\cos x \\ \sin\left(x+\tfrac{3\pi}{2}\right) &= -\cos x\end{aligned}\right\} \Rightarrow f(\psi) = -\frac{\cos\left(\frac{9\pi}{4}\cos\theta\right)}{3\cos\left(\frac{3\pi}{4}\cos\theta\right)}$$ 1/3

d'où l'expression du champ normalisé dû à 3 dipôles uniformément excités et équidistants est :

$$F(\theta) = -\frac{\cos\left(\frac{9\pi}{4}\cos\theta\right)}{3\cos\left(\frac{3\pi}{4}\cos\theta\right)}\,\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}$$ 2/3

2°) diagramme de rayonnement (voir feuille jointe) ②

PROBLEME 12,33

1°) a) $$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\frac{\Delta z}{2}}^{+\Delta z/2} I(z_p)\,\frac{e^{-j\beta R}}{R}\,dz_p\,\vec{k}$$ 1/3

$R = PM$ on prendra pour le cas du dipôle court

$R \simeq r$ pour les termes de phase et d'amplitude. 1/3

$r = OM$ d'où :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{e^{-j\beta r}}{r}\int_{-\frac{\Delta z}{2}}^{+\frac{\Delta z}{2}} I(z_p)\,dz_p\,\vec{k}$$

b) Calcul dans le cas du dipôle court

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{e^{-j\beta r}}{r}\left\{\int_{-\frac{\Delta z}{2}}^{0} I_A\left(1+\frac{2z_p}{\Delta z}\right)dz_p + \int_0^{\frac{\Delta z}{2}} I_A\left(1-\frac{2z_p}{\Delta z}\right)dz_p\right\}\vec{k}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{-j\beta r}}{r} I_A \left\{ \int_0^{\frac{\Delta z}{2}} \left(1 - \frac{2z_p}{\Delta z}\right) dz_p + \int_0^{\frac{\Delta z}{2}} \left(1 - \frac{2z_p}{\Delta z}\right) dz_p \right\} \vec{k} \quad (3)$$

$$z_p' = -z_p$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{-j\beta r}}{r} I_A \times 2 \left\{ z_p' - \frac{2 z_p'^2}{\Delta z 2} \right\}_0^{\frac{\Delta z}{2}} \vec{k}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi r} e^{-j\beta r} \times 2 I_A \left\{ \frac{\Delta z}{2} - \frac{(\Delta z)^2}{4\Delta z} \right\} \vec{k}$$

$$\boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0}{8\pi r} e^{-j\beta r} I_A \Delta z \, \vec{k}} \quad /// \quad (1)$$

2°) Dans ce cas

$$\vec{H} = j\beta \frac{\sin\theta}{\mu_0} A_z \vec{u_\varphi} = j\frac{\beta \sin\theta}{\mu_0} \times \frac{\mu_0}{8\pi r} I_A \Delta z \, e^{-j\beta r} \vec{u_\varphi} \quad (1/3)$$

$$\vec{H} = j\beta \frac{\sin\theta}{8\pi r} I_A \Delta z \, e^{-j\beta r} \vec{u_\varphi} \quad (1/3)$$

3°) Expression de $\vec{E}$

$$\vec{E} = j\omega \sin\theta A_z \vec{u_\theta} = j\omega \sin\theta \frac{\mu_0}{8\pi r} I_A \Delta z \, e^{-j\beta r} \vec{u_\theta} \quad (1/3)$$

$$\vec{E} = \frac{j\omega\mu_0}{8\pi r} I_A \Delta z \, e^{-j\beta r} \sin\theta \vec{u_\theta} \quad (1/3)$$

4°) a) $$\vec{R} = \frac{1}{2}\vec{E} \times \vec{H}^* = \frac{1}{2} \frac{j\omega\mu_0 \times -j\beta}{(8\pi r)^2} \sin^2\theta |I_A|^2 \Delta z^2 \vec{u_\theta} \wedge \vec{u_\varphi} \quad (1/3)$$

$$\vec{R} = \frac{1}{2} \frac{\omega\mu_0\beta}{(8\pi r)^2} \sin^2\theta |I_A|^2 \Delta z^2 \vec{k} \quad (1/3)$$

b) Puissance rayonnée à une distance r de l'antenne :

$$P = \iint_{\text{sphère de rayon } r} \vec{R} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2} \frac{\beta^2 \eta}{(8\pi)^2} |I_A|^2 \Delta z^2 \iint \frac{r^2 \sin^3\theta \, d\theta \, d\varphi}{r^2}$$ (1/3)

$$= \frac{\beta^2 \eta}{2(8\pi)^2} |I_A|^2 \Delta z^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta = \frac{\beta^2 \eta}{6 \times 8\pi} |I_A|^2 \Delta z^2$$ (4/3)

($\int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta = \frac{4}{3}$)

$$= \frac{\beta^2 120\pi}{6 \times 8\pi} |I_A|^2 \Delta z^2 = \frac{\beta^2 5}{2} |I_A|^2 \Delta z^2$$

$$= \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \times \frac{5}{2} |I_A|^2 \Delta z^2 = \frac{10\pi^2}{\lambda^2} |I_A|^2 \Delta z^2$$

$$P = 10\pi^2 |I_A|^2 \left(\frac{\Delta z}{\lambda}\right)^2$$ (4/3)

5°) a) résistance de rayonnement

$$P = \frac{1}{2} R_r |I_A|^2 \Rightarrow R_r = \frac{2P}{|I_A|^2} = 20\pi^2 \left(\frac{\Delta z}{\lambda}\right)^2$$ (1/3) (1/3)

b) A.N $\quad l = \Delta z = 6\,cm$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^8} = 3\,m$$

$$R_r = 20\pi^2 \left(\frac{0{,}06}{3}\right)^2 = 20\pi^2 \times 4 \cdot 10^{-4}$$

$$= 0{,}079\ \Omega$$ (4/3)

6°) a) Pour un dipôle idéal $R_d = \frac{l}{2\pi a} R_s$; $R_s = \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\sigma}}$

pour un dipôle court

$$R_d = \frac{2}{|I_A|^2} P_d = \frac{2}{|I_A|^2} \int_{-\frac{\Delta z}{2}}^{+\frac{\Delta z}{2}} \frac{1}{2} \frac{dz}{2\pi a} R_s |I(z)|^2$$ (2/3)

$$R_d = \frac{R_s}{2\pi a}\int_{-\frac{\Delta_z}{2}}^{+\frac{\Delta_z}{2}} \left(1-2\frac{|z|}{\Delta_z}\right)^2 dz$$

$$= \frac{R_s}{2\pi a}\left\{\int_0^{\frac{\Delta_z}{2}}\left(1-\frac{2z}{\Delta_z}\right)^2 dz + \int_{-\frac{\Delta_z}{2}}^{0}\left(1+\frac{2z}{\Delta_z}\right) dz\right\}$$

$$= \frac{R_s}{2\pi a} \times 2\int_0^{\frac{\Delta_z}{2}}\left(1-\frac{2z}{\Delta_z}\right)^2 dz \qquad u = 1-\frac{2z}{\Delta_z}$$

$$du = -\frac{2}{\Delta_z}dz \Rightarrow dz = -\frac{\Delta_z}{2}du$$

$$= \frac{R_s}{\pi a}\frac{\Delta_z}{2}(-)\int_1^0 u^2\,du = \frac{R_s\Delta_z}{2\pi a}\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{R_s\Delta_z}{2\pi a}\times\frac{1}{3}$$

(1)

$$R_d = \frac{1}{3}R_d^{dipole}$$

b) $R_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = \sqrt{\frac{2\pi\times10^8\times4\pi.10^{-7}}{2\times3,5\times10^7}} = \sqrt{11,28\,10^{-6}}$

$= 3,36\,10^{-3}\ \Omega$

$$R_d^{dipole} = \frac{\Delta_z}{2\pi a}R_s = \frac{0,06}{\pi\times0,002}\times3,36\,10^{-3}$$

$R_d^{dipole} = 0,032 \Rightarrow$ $R_d = \frac{0,032}{3}\ \Omega$ (2/3) $= 0,0107\ \Omega$

c) efficacité de rayonnement

$$e_r = \frac{R_r}{R_r+R_d} = \frac{0,079}{0,0107+0,079}$$ (2/3)

$e_r = 88,07\%$ (1/3)

2) a) Intensité maximale de rayonnement (1/3)

$$U = \frac{1}{2\eta}|E|^2r^2 = \frac{1}{2\eta}\times\frac{\omega^2\mu_0^2}{(8\pi)^2}|I_A|^2\Delta_z^2\sin^2\theta$$

$$U_{max} = \frac{\omega^2\mu_0^2|I_A|^2\Delta_z^2}{2\eta(8\pi)^2}$$ (1/3)

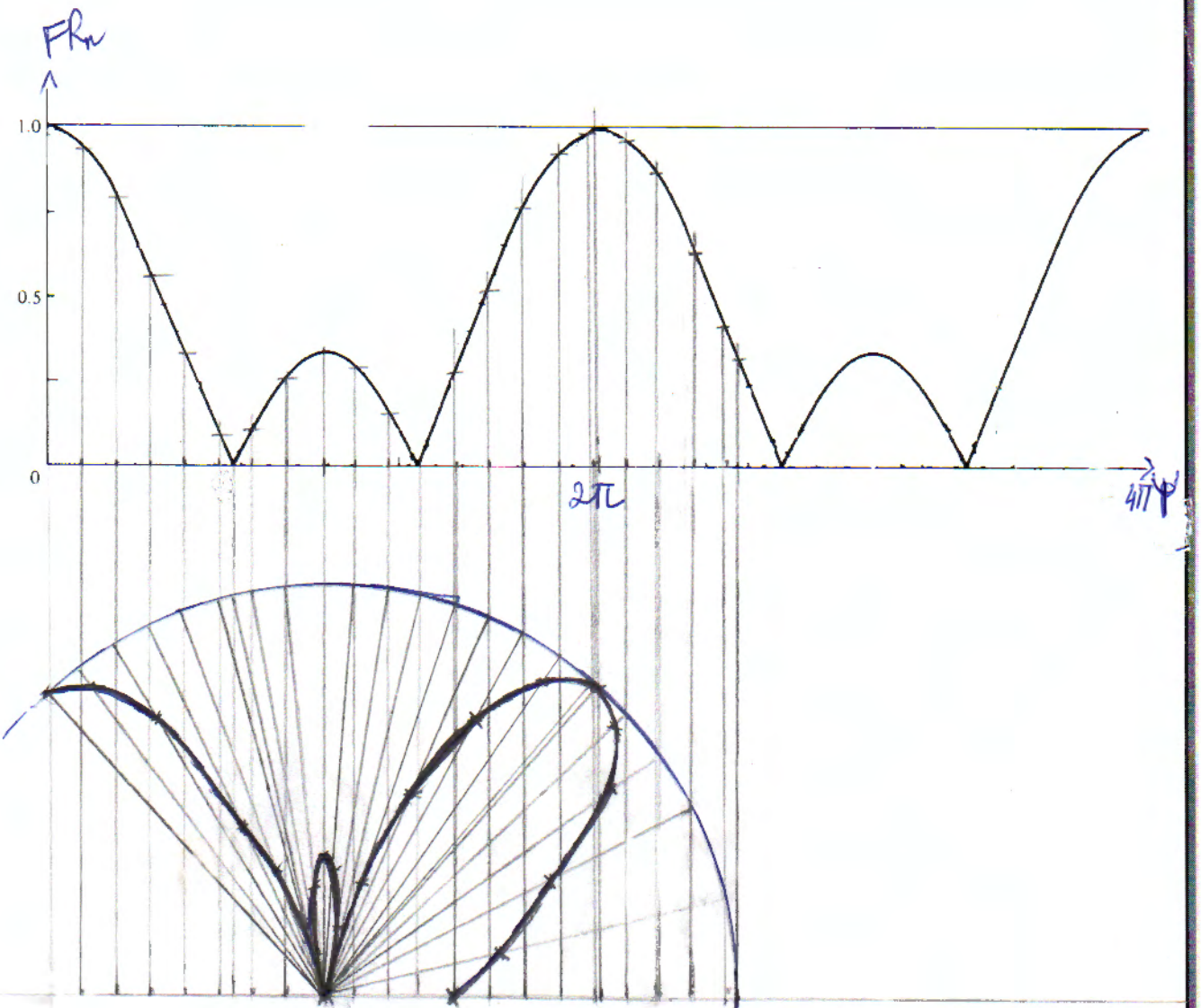
b) $D = \frac{U_{max}}{U_{moy}}$; $U_{moy} = \frac{P}{4\pi} = \frac{\beta^2 \eta \, |I_A|^2 (\Delta_S)^2}{6 \times 8\pi \times 4\pi}$ 1/3

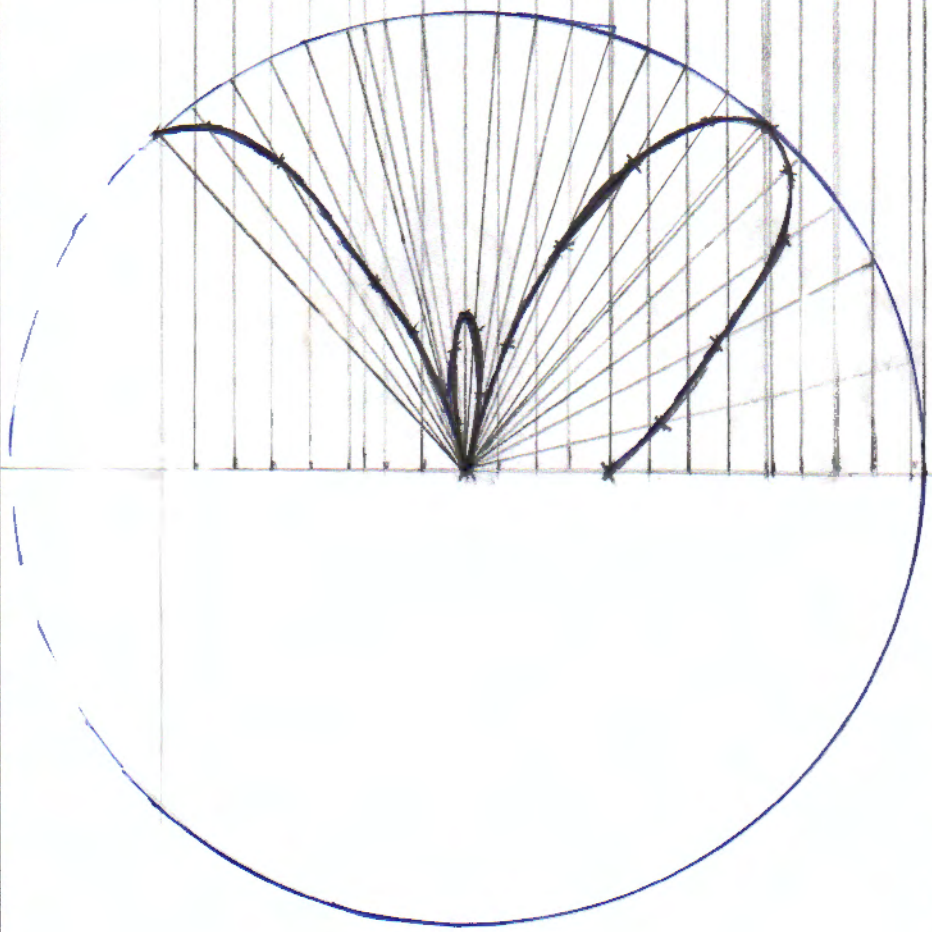
$D = \frac{\omega^2 \mu_0 \, |I_A|^2 (\Delta_S)^2}{2\eta (8\pi)^2} \times \frac{3 \times (8\pi)^2}{\beta^2 \eta \, |I_A|^2 (\Delta_S)^2}$

$\frac{\omega^2 \mu_0^2}{\beta^2 \eta^2} = \frac{\omega^2 \mu_0}{\omega^2 \mu_0^2 \frac{\mu_0}{\varepsilon}} = 1 \Rightarrow D = \frac{3}{2} = 1,5$ 1/3

c) $D = \frac{4\pi}{\Omega_A} \Rightarrow \Omega_A = \frac{4\pi}{\frac{3}{2}} = \frac{8\pi}{3}$ steradian 1/3 1/3

d) $G = \eta D = \frac{3}{2} \times 0,880 = 1,320$ 1/3 1/3





exactitude du
- Centre de (0,5)
- du rayon (0,5)
manière de tracer le
procédure (0,5)
résultat final (0,5)
-