Série 03

Exn°01.

1/ on a $f(x,y) = (x+y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$

donc $|f(x,y)| \leq |x+y| \leq |x|+|y| \leq 2d((x,y),(0,0))$

d'où $\lim_{d((x,y),(0,0))\to 0} f(x,y) = 0$

2/ On a $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$,

comme $f(x,x) = 0$ et $f(x,2x) = \frac{x^2-(2x)^2}{x^2+(2x)^2} = \frac{x^2-4x^2}{x^2+4x^2} = -\frac{3}{5}$.

alors : $\lim_{x\to 0} f(x,x) = 0$ et $\lim_{x\to 0} f(x,2x) = -\frac{3}{5}$.

donc f n'admet pas de limite en $(0,0)$.

3/ On a $f(x,y) = \frac{|x+y|}{x^2+y^2}$

comme : $\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{2|x|}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$.

donc f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exn°03 :

1/ On a f est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ en tant que fction rationnelle de deux variables définies sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. De plus, on a

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$: $|f(x,y)| \leq \frac{|x^3+xy^2|}{x^2+y^2}$

$\leq \frac{|x|^3+|x|.|y|^2}{x^2+y^2}$

or, on a: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$: $\begin{cases} |x| \leq \sqrt{x^2+y^2} \\ |y| \leq \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$, on en déduit alors

$$|f(x,y)| \leq \frac{(x^2+y^2)^{3/2}(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2}$$

$$\leq \sqrt{x^2+y^2} + (x^2+y^2)$$

$$\leq \|(x,y)\| + (\|(x,y)\|)^2, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

3/ Comme $\lim_{d((x,y),(0,0)) \to 0} \|(x,y)\| = 0$, alors $|f|$ est majorée par une fction qui tend vers 0, lorsque $d((x,y),(0,0))$ tend vers $(0,0)$.

d'où $\lim_{d((x,y),(0,0)) \to 0} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, f est donc également continue en $(0,0)$. Conclusion: f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exo N°04:

1/ La fction $(x,y) \mapsto e^x$ est continue sur Ω en tant que composée d'une fction polynômes de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}$ par exp. De plus, $(x,y) \mapsto \ln(xy)$ est continue sur Ω en tant que composée d'une fction polynômes de deux variables ($(x,y) \mapsto xy$) à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ par une fction ln continues sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc f est continue sur Ω en tant que produit de fctions continues sur Ω.

2/ Elle admet donc des applications partielles sur Ω, en particul en $(1,e)$: $\forall x \in]0,+\infty[$: $f_1(x) = f(x,e) = e^x \ln(ex) = e^x(1+\ln(x))$

$\forall y \in]0,+\infty[$: $f_2(y) = f(1,y) = e \ln(y)$.

on a : $\frac{\partial f}{\partial x}(1,e) = f_1'(1) = 2e$

$f_1'(x) = e^x \ln(ex) + \frac{e}{ex} e^x = e^x \left(\frac{1}{x} + \ln(ex) \right)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(1,e) = f_2'(e) = 1.$

$f_2'(y) = \frac{e}{y}$